Hamiltonian 型式に基づく電子プラズマの流体理論

市　川　芳　彦（日大理工）

（10月8日受理）

§1　はじめに

最近の固体プラズマ，気体プラズマなどに関する研究において，特に大きな関心を惹いているのは，従来の粒子間の衝突過程に基づく輸送理論では説明できないような実験結果にみられるいくつかの異常輸送現象である。この現象に対しては，プラズマ内の集団的相関効果が本質的である，という事が予想されるが，Bohm-Pines の理論，或いはVlasov の運動方程式に基づく理論など，今までの理論では，プラズマ内の微少振幅のゆらぎを取りあつかつており，異常輸送現象の解明には成功していない。

プラズマ内に発生するゆらぎの輸送現象に対する効果は，最近，準線型理論[1]によつて研究されているが，此処ではプラズマ内の任意の振幅の振動の集合をとりあつかう目的で，別の方法を模索してみよう。プラズマ内の粒子の熱的ゆらぎよりも大きい振幅の振動の集合を問題にするので，プラズマのparticle aspectを無視し，流体近似の上に問題を展開してみよう。

§2　電子流体に対するHamiltonian

電子流体に対する運動方程式はKinetic pressureを無視すると（Cold plasma の近似）

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_m \vec{v}) = 0 \qquad 1.a)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\mathrm{grad}\ \vec{v} = \frac{e}{m}(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}) \qquad 1.b)$$

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = 4\pi\rho_e \ , \ \mathrm{div}\vec{B} = 0 \qquad 2.a)$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\ ,\quad \mathrm{rot}\ \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad 2.\mathrm{b})$$

$$\rho_m = mn\ ,\quad \rho_e = en\ ,\quad \vec{j} = en\vec{v} \qquad 3)$$

とかける。nは粒子のnumber density。

系の励起状態などを議論する為に，この方程式系を正準型式にかきかえた方が見通しが良くなるのではあるまいか？

その為に，昔の量子流体力学の理論[2)]を参考にして，

$$\begin{cases} \vec{v} + \dfrac{e}{mc}\vec{A} = -\nabla\phi - \chi\nabla\psi & 4.\mathrm{a}) \\ \vec{E}_l = -\mathrm{grad}\ \Phi & 4.\mathrm{b}) \\ \vec{E}_t = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\ ,\quad \vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}\ ,\quad \mathrm{div}\vec{A} = 0 & 4.\mathrm{c}) \end{cases}$$

で定義されるポテンシャル函数（ϕ，χ，ψ）（Φ，$\vec{A}$）を導入する。そうすると，方程式系 1.a），1.b），2.a），2.b）は，

$$\mathcal{L} = \rho_m \left\{ \dot{\phi} + \chi\dot{\psi} - \frac{v^2}{2} - \frac{e}{m}\Phi \right\} + \frac{1}{8\pi}\left(E_t^{\,2} - B^2 \right) \qquad 5)$$

であたえられるLagrangian 密度に対する変分原理，

$$\delta I = \iiint d^3x\,dt \left[\frac{\partial}{\partial \Psi_i} - \Sigma\frac{\partial}{\partial x_k}\ \frac{\partial}{\partial(\partial\Psi_i/\partial x_k)} - \frac{\partial}{\partial t}\ \frac{\partial}{\partial \dot{\Psi}_i} \right] \delta\psi_i \qquad 6)$$

但しΨ_iは（ϕ，χ，ψ，Φ，$\vec{A}$，ρ_m），によつて，導かれる事がわかる。そうすると，このLagrangian densityに対応するHamiltonian densityは，

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\rho_m v^2 + \frac{e}{m}\rho_m\Phi + \frac{1}{8\pi}\left(E_t^{\,2} + B^2 \right) \qquad 7)$$

という形に得られる。Eq.4.a）において，ψ，χ の代りに

$$\psi = \psi_1 / \psi_2 \quad , \quad \chi = \psi_2^2 / (2\rho_m) \tag{8}$$

と変換し，更らに

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + i\psi_2) \quad , \quad \Psi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - i\psi_2) \tag{9}$$

を導入すると，それは

$$\vec{v} = -\nabla\phi - \frac{i}{2\rho_m}\{\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\} - \frac{e}{mc}\vec{A} \tag{10}$$

となる。Eq.10）をEq.7）に代入すると，

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{plasmon}} + \mathcal{H}_{\text{roton}} + \mathcal{H}_{\text{radiation}}$$

$$+ \mathcal{H}_{\text{plasmon-roton}} + \mathcal{H}_{\text{plasmon-radiation}} + \mathcal{H}_{\text{roton-radiation}} \tag{11}$$

$$\mathcal{H}_{\text{plasmon}} = \frac{1}{2}\rho_m(\nabla\phi)^2 + \frac{e}{m}\rho_m\Phi \tag{11.a}$$

$$\mathcal{H}_{\text{roton}} = -\frac{1}{8\rho_m^o}\{\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\}^2 \tag{11.b}$$

$$\mathcal{H}_{\text{radiation}} = \frac{1}{8\pi}\left\{\mathrm{rot}\vec{A}^2 + \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)^2\right\} + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{mc}\right)^2\rho_m^o A^2 \tag{11.c}$$

$$\mathcal{H}_{\text{plasmon-roton}} = \frac{1}{2}\ \phi\{\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\rho_m^o} - \frac{1}{\rho_m}\right)$$

$$\{\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\}^2 \tag{11.d}$$

$$\mathcal{H}_{\text{plasmon-radiation}} = \frac{e}{mc}\rho_m\nabla\phi\cdot\vec{A} + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{mc}\right)^2\rho_m'\cdot A^2 \tag{11.e}$$

$$\mathcal{H}_{\text{roton-radiation}} = \frac{e}{mc}i\{\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\}\cdot\vec{A} \tag{11.f}$$

但し，$\rho_m = \rho_m^o + \rho_m'$ ，$\rho_m^o = mn_o = \mathrm{const}$ と分離する事ができる。

電子プラズマの場合Eq.11.b）であらわされる運動のモードがどのようなものであるか今后の検討を必要とする項であるが，ここではHeⅡの理論で用

いられたroton という言葉を便宜的に用いておく。

Eq 11.a)であたえられるHamiltonian density は，

$$\rho'_m = \frac{1}{\sqrt{V}} m \Sigma n(\vec{k}) e^{ikx}, \quad n(\vec{k}) = \sqrt{\frac{n_o k^2}{m}} \; q(\vec{k}) \qquad 12.a)$$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{V}} \Sigma \phi(\vec{k}) e^{-ikx}, \quad \phi(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{m n_o k^2}} p(\vec{k}) \qquad 12.b)$$

と展開して $\{q(\vec{k}), p(\vec{k})\}$ 表示に移すと

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_k \{ p(\vec{k}) p(-\vec{k}) + \omega_p^2 q(\vec{k}) q(-\vec{k}) \}$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{V}} \sum_k \sum_l \frac{1}{\sqrt{m n_o}} \frac{\vec{k}\cdot\vec{l}}{k\, l} | \vec{k} + \vec{l} | \; p(\vec{k}) p(\vec{l}) q(\vec{k}+\vec{l}) \qquad 13)$$

をあたえる。此の表式の右辺第二項は，Bohm-PinesのHamiltonianのいわゆるRandom-Phase の項の中，$|\vec{k}+\vec{l}| < k_c$の部分に形の上で一致している。この項はプラズマ振動の異なるモードの間の相互作用を示すもので，振幅の大きいプラズマ振動が存在する系では，この相互作用項による非線型効果が本質的になろう。

Eg.11.c)であらわされるプラズマ内の輻射場の固有振動数は

$$\omega(k)^2 = c^2 k^2 + \omega_p^2 \qquad 14)$$

という良く知られた分散関係であたえられる。

以上の考察から，Eq.11.a)～11.f)であたえられるHamiltonian は，いわゆる "roton" の自由度に関する項を別とすれは，普通に知られているプラズマの理論のそれと実質的に一致していることが知られる。問題は，上のようにして導入された "roton" の自由度が，プラズマ内の運動の自由度として物理的に意味のあるものなのか？ もしそうだとしたら，どのような現象にそれが関与しているであろうか？ という事である。

He IIの超流動に関する問題では,量子流体力学という理論的試みそのものが，Bogoliubov, Lee-Yang, Brueckner-Sawadaなどによる多体問題的研究によって，研究の潮流の主流から退けられてしまったが，速度場 $\vec{v}$ に対して表式10)によって導入された "roton" の自由度が，物理的実在に対応

しないという原理的証明はないのではあるまいか？　現象論的理論における理論的帰結としての此の自由度の検討がHe II以外の現象に対して可能になりはせぬか？　という意味で，プラズマにおける "roton" 自由度の問題は，興味がもたれる。

§ 3.　非線型項の力学的効果

Eq.13)の第二項，プラズマ振動の異なるモードの間の相互作用項の力学的効果を議論しよう。

座標変換

$$q(\vec{k},t)=\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_p}}\left\{a(\vec{k},t)+a^*(-\vec{k},t)\right\} \tag{15.a}$$

$$p(\vec{k},t)=\sqrt{\frac{\hbar\omega_p}{2}}(-i)\left\{a(-\vec{k},t)-a^*(\vec{k},t)\right\} \tag{15.b}$$

を導入すると，Eq.13)は

$$H_{pl}{}^{o}=\hbar\omega_p\sum_k a^*(k)\,a(k) \tag{16}$$

$$H_{pl}{}^{3}=h\frac{\varepsilon}{\sqrt{V}}\sum A(\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3)\left\{a(-k_1)-a^*(k_1)\right\}\times\left\{a(-k_2)-a^*(k_2)\right\}\left\{a(k_3)+a^*(-k_3)\right\} \tag{17}$$

但し，$\varepsilon=\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{\hbar\omega_p}{2mn_o}}$，

$$A(k_1,k_2,k_3)=\frac{\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2}{k_1\ k_2}\ |\vec{k}_3|\ \ \delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3) \tag{18}$$

とかける。

運動方程式

$$i\hbar\frac{\partial a}{\partial t}=[a,H],\ -i\hbar\frac{\partial a^*}{\partial t}=[a^*,H] \tag{19}$$

に対して，

$$a(k,t)=e^{-iw_pt}\,\alpha(k,t),\ a^*(k,t)=e^{iw_pt}\alpha^*(k,t) \qquad 20)$$

とおき，van-der Pol-Bogoliubov-Krylov[3]に従つて，

$$\alpha(k,t)=\alpha^{(0)}(k;t,\varepsilon\tau,\varepsilon^2\theta,\cdots)+\varepsilon\alpha^{(1)}(k;t,\varepsilon\tau,\varepsilon^2\theta,\cdots)$$

$$+\varepsilon^2\alpha^{(2)}(k;t,\varepsilon\tau,\varepsilon^2\theta,\cdots)+\cdots \qquad 21.a)$$

$$\alpha^*(k,t)=\alpha^{*(0)}(k;t,\varepsilon\tau,\varepsilon^2\theta,\cdots+\varepsilon\alpha^{*(1)}(k;t,\varepsilon\tau,\varepsilon^2\theta,\cdots)$$

$$+\varepsilon^2\alpha^{*(2)}(k;t,\varepsilon\tau,\varepsilon^2\theta,\cdots)+ \qquad 21.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial(\varepsilon\tau)}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial(\varepsilon^2\theta)}+\cdots \qquad 21.c)$$

と展開して，ε の各次数の項を分離すると，

$$\frac{\partial\alpha^{(0)}}{\partial t}=0\ ,\ \frac{\partial\alpha^{(0)}}{\partial(\varepsilon\tau)}=0 \qquad 22)$$

$$\frac{\partial\alpha^{(0)}}{\partial(\theta)}=i\triangle\omega\,\alpha^{(0)} \qquad 23)$$

但し

$$\triangle\omega_{\mathrm{pl-pl}}=\varepsilon^2\frac{4}{3}\omega_p^{-1}\frac{1}{V}\sum_{\vec{l}}\frac{1}{l^2(\vec{l}+\vec{k})^2k^2}\{6l^4k^4+2(\vec{l}\cdot\vec{k})l^4k^2$$

$$-4(\vec{l}\cdot\vec{k})l^2k^4+24(\vec{l},\vec{k})^2k^4-6(\vec{l},\vec{k})^2l^4+36(\vec{l}\cdot\vec{k})^3k^2$$

$$-30(\vec{l}\cdot\vec{k})^3l^2-20(\vec{l}\cdot\vec{k})^4\}\ |\alpha(l)|^2 \qquad 24)$$

即ち，23)の結果，非線型相互作用の結果，波数$\vec{k}$のプラズマ振動には，波数$\vec{l}$のプラズマ振動の強度に比例する振動数のズレを生ずる。

同様な計算を，plasmon-roton 相互作用の効果に対して行なうと，これによる振動数のズレが，

$$\triangle\omega_{\mathrm{pl-rot}}=\varepsilon^2 16\frac{1}{V}\sum_{\vec{l}}\frac{1}{k^2}(k^2+2\vec{l}\cdot\vec{k})^2\frac{N(\vec{l}+\vec{k})-N(l)}{\Omega(l)-\Omega(\vec{l}+\vec{k})+\omega_p} \qquad 25)$$

として得られる。但し$\Omega(k)$は "roton" mode の固有振動数，$N(k)$は

"roton" の箇数。

§4　非線型項の統計力学的効果

非線型項について興味があるのは，この項の統計力学的な効果である。プラズマ振動子の統計的分布状態がどのようにその平衡状態に到達するか？という問題をPrigogine-Heines によつて展開されたAnharmonic solid について理論[4]を手本として議論を進める事が有効であろう。然し，実は plasmon の場合には phonon の場合と異なり，振動数の分散関係は $\omega=\omega_p$ $=\mathrm{const}$ である為，三個の plasmonの関与する過程では，エネルギー保存が成立しない。それ故二次の diagonal fragment はプラズマ振動子系の非可逆的ふるまいに対しては，全く寄与しない。此のような系に対して，Prigogine の理論を適用して，プラズマ振動子の分布に対するKinetic Equation を導く事は，面白い問題であろう。

Kinetic Equation を導く為に，Prigogine流よりも手つとり早い方法は，B－B－G－K－YのHierarchy方程式から出発することである。この方法と，Prigogine 流の方法とが，同じ結果をあたえることは，一様なプラズマの場合，粒子の速度分布函数に対するKinetic Equationの導出においては，実際に確められているが，今の問題の場合にはどうであろうか？

プラズマ振動子系に対しては，

$$\frac{\partial}{\partial t}F^{(1)}(p(\vec{k}),q(\vec{k}))=\omega_p{}^2\,q(-\vec{k})\frac{\partial F^{(1)}}{\partial p(\vec{k})}-p(-\vec{k})\frac{\partial F^{(1)}}{\partial q(\vec{k})}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_l-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{mn_o}}\frac{(\vec{k}-\vec{l})\vec{l}}{|\vec{k}-\vec{l}|\,l}k\frac{\partial}{\partial p(\vec{k})}\int\!\!\int p(\vec{k}-\vec{l})p(\vec{l})F^{(3)}(p(\vec{k}),q(\vec{k});$$
$$p(\vec{k}-\vec{l}),q(\vec{k}-\vec{l});p(\vec{l}),q(\vec{l}))dq(\vec{l})dp(\vec{l})dq(\vec{k}-\vec{l})dp(\vec{k}-\vec{l})$$
$$+\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_l\frac{1}{\sqrt{mn_o}}\frac{\vec{k}\cdot\vec{l}}{k\,l}|\vec{k}+\vec{l}|\frac{\partial}{\partial q(\vec{k})}\int\!\!\int p(\vec{l})q(\vec{k}+\vec{l})\,F^{(3)}(p(\vec{k}),q(\vec{k});$$
$$p(\vec{k}+\vec{l}),q(\vec{k}+\vec{l});p(\vec{l}),q(\vec{l}))\,dq(\vec{l})dp(\vec{l})dq(\vec{k}+\vec{l})dp(\vec{k}+\vec{l}) \tag{26.a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F^{(3)}(p(\vec{k}), q(\vec{k}); p(\vec{k}-\vec{l}), q(\vec{k}-\vec{l}); p(\vec{l}), q(\vec{l})) = \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad 26.b)$$

という形の方程式系が得られる。三体の分布函数$F^{(3)}$に対する方程式でcloseさせて，26.a)を一体の分布函数$F^{(1)}$のみでかく事が目的であるが，なかなか複雑でまだ答は出ていない。

最近のプラズマ物理の分野では，プラズマ内の振動電場のゆらぎの相関などを測定してプラズマ内の乱流現象を研究しようという試みも行なわれるようになつているので，ここで述べたような仕方で，プラズマ内の振動の相関効果を研究することは，実験との関係もあつて特に興味深い問題と考えられる。

§5　電磁波との相互作用

プラズマと電磁波との相互作用は，色々具体的な問題に関連して，従来からひろく議論されている事柄である。然し，此処では，Kanazawa-Matsudairaによつて論じられている；コンプトン散乱に対する多体相関の効果について考えてみよう。Kanazawa-Matsudairaによれば，トンプソン散乱の断面積は，角度の小さい領域では多体相関による安定なプラズマ振動の存在の為に，著るしく変更される。

此のトランプソン散乱の過程は，Hamiltonian Eq.11.e)の第二項によつて記述されるものであるが，そのような過程に対して，Eq.11.f)で記述されるような"roton"を媒介とする光の散乱過程はどのような寄与をあたえるであろうか？　"roton"の自由度が物理的に存在するか否かを調べる為には，このような電磁波との相互作用を調べるのが一つの可能性ではあるまいか？

§6　おわりに

以上，非常に粗っぽい，いわばデッサンのような話しを展開したが，電子プラズマにおける "roton" という正体の知れないものをどういう風に処理したら良いのか，昔 "量子流体力学" の理論について色々と経験された先輩の御教示をいただければ幸いである。

引　用　文　献

1) Drummond and Pines, Proceedings of the Salzburg Conference (1961)
Vedenov, Velihov and Sagdeev, Proceedings of the Salzburg Conference (1961)

2) J.M.Ziman, Proc. Roy. Soc. A. 219 (1953), 257

3) Krylov-Bogoliubov, Introduction to Non-linear Mechanics Kiev, (1937)

4) Prigogine, Non-equilibrium Statistical Mechanics

5) 金沢・松平，日本物理学会誌

Indirect Exchange Interaction についてのノート

阿　部　龍　蔵（物性研）

（10月10日受理）

Kasuya[1), Yosida[2), Kaplan-Lyons[3) といったs－d（あるいはs－f）相互作用を勉強しているうちに気づいたことがあるので報告したい。s－d相互作用は伝導電子の分極をひきおこしそのためd電子のスピン間に次のような相互作用が働らく。